February 2, 1998

PHY 742 – Notes on Clebsch-Gordan coefficients

Reference: Abramowitz & Stegum – pg. 1006

Original formula:

$$< j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m >= \delta_{m,m_1+m_2} \sqrt{\frac{(j_1+j_2-j)!(j_1-j_2+j)!(-j_1+j_2+j)!(2j+1)}{(j_1+j_2+j+1)!}} \tag{1}$$
$$\times \sum_k \frac{(-1)^k \sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!}}{k!(j_1+j_2-j-k)!(j_1-m_1-k)!(j_2+m_2-k)!(j-j_2+m_1+k)!(j-j_1-m_2+k)!}$$

Working formula:

$$< j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m >= \delta_{m,m_1+m_2} \sqrt{\frac{(j_1-j_2+j)!(-j_1+j_2+j)!(2j+1)}{(j_1+j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!}} \tag{2}$$
$$\times \sqrt{\frac{(j_1+m1)!(j_2-m_2)!(j+m)!}{(j_1-m1)!(j_2+m_2)!(j-m)!}}$$
$$\times \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(j_1+j_2-j)!}{(j_1+j_2-j-k)!} \frac{(j_1-m_1)!}{(j_1-m_1-k)!} \frac{(j_2+m_2)!}{(j_2+m_2-k)!} \frac{(j-m)!}{(j-j_2+m_1+k)!(j-j_1-m_2+k)!}$$